第 1 講

自 励 振 動

—テーマ—
- ◆ 負抵抗
- ◆ ファン・デル・ポールの方程式
- ◆ Tea Time： 発振現象

抵抗と負抵抗

速度に比例した抵抗がはたらく単振動は線形の方程式

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+x=0 \tag{1}$$

で表される．これは1階の微分方程式に分解して

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=-\varepsilon\dot{x}-x\end{aligned} \tag{2}$$

と書ける．(2)によればある時刻の x と v を知れば次の瞬間の値 $x+(dx/dt)dt$, $v+(dv/dt)dt$ が定まる．すなわち運動の軌道は (x,v) 平面（相平面，位相空間）内で決定論的に決まり，軌道がたがいに交わることはない，$\varepsilon>0$ のとき図1のように軌道は原点に近づき，ついにはそこで静止する．軌道を引きつける点を一般にアトラクタという．この場合安定点である原点はアトラクタである．

もしも $\varepsilon<0$ ならば（1）あるいは（2）はしだいに成長する振動を表し（図2），アトラクタはない，この場合（$\varepsilon<0$ の場合），$\varepsilon\dot{x}$ の項は負抵抗と呼ばれる．負抵抗がある場合，初めに小さな運動があれば振幅はしだいに大きくなる．すな

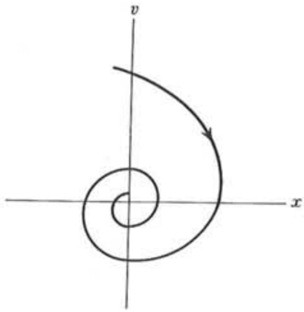


図1　抵抗（$\varepsilon>0$）

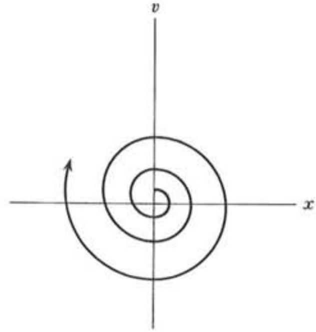


図2　発振（負抵抗，$\varepsilon<0$）

わち発振が起こる．

ファン・デル・ポールの方程式

ファン・デル・ポール（van der Pol）は3極真空管を使った電気振動の発振回路の研究から，発振機構の特徴をよく表す方程式を導いた．簡単化するとこの方程式は

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0 \qquad (\varepsilon>0) \tag{3}$$

と書ける．これをファン・デル・ポールの方程式という．$\varepsilon>0$ としているから左辺第2項 $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$ は振幅が小さいとき（x^2 が1より小さいとき）負抵抗を与えるので小さな振動はしだいに成長する．x は正と負の値をとるが，振幅が大きくなると $\varepsilon(1-x^2)$ は小さい値をとる時間が長くなるので負抵抗は効かなくなり，発振は抑えられることになる．これは計算機で確かめられる．

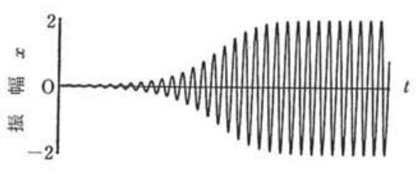


図3　ファン・デル・ポールの方程式の解（$\varepsilon=0.1$）

【ε が小さいとき】　図3は $\varepsilon=0.1$ としたときの計算結果である（初期値は $x=0.01$，$\ddot{x}=0$）．この場合，振幅は2になるまで成長し，そこで飽和することがわかる．$\varepsilon=0.1$ のときの相平面（x, $\dot{x}$）における軌道を図4に示す．原点に近いところから出発すると $t\to\infty$ で軌道はある曲線に漸近する．このように漸

近する曲線を極限軌道（リミットサイクル）と呼ぶ．極限軌道も軌道を引き込むのでアトラクタの1種である．εが小さいとき極限軌道はほぼ円になり，その半径は2に近い．極限軌道の外の振幅の大きな状態から出発すると振幅はしだいに小さくなり，軌道は同じ極限軌道に巻きついてくる（この場合は $-\varepsilon(1-x^2)>0$ であって，この項は負抵抗ではなく，正の抵抗を与える）．

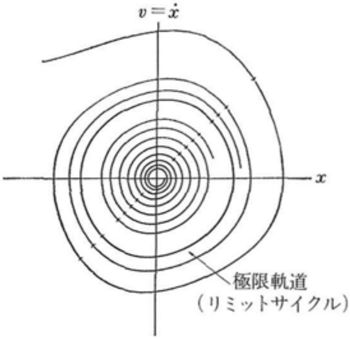


図4 相平面上の軌道（$\varepsilon=0.1$）

εが小さいとき振幅が2に漸近する理由は次のように証明される．

【証明】 極限軌道に達したとすると抵抗力 $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$ のする仕事の平均は0でなければならない．この仕事は $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}\,dx$ であるから，$dx=\dot{x}\,dt$ を用いると振幅は

$$\int_0^T (1-x^2)\,\dot{x}^2\,dt=0 \tag{4}$$

により決定されることになる．εが小さいときの極限軌道における振動は近似的に単振動で $x=a\cos t$ で表せると考えられる．aは極限軌道の振幅であり，（4）から

$$\int_0^{2\pi} (1-a^2\cos^2 t)\,a^2\sin^2 t\,dt=\pi a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=0 \tag{5}$$

を得る．この式の根のうちで $a=0$ は除外されるから，極限軌道の振幅は $a=2$ となる． ∎

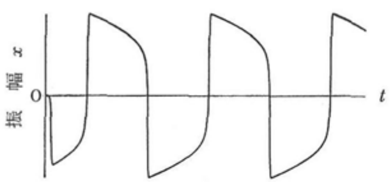


図5 ファン・デル・ポールの方程式の解（$\varepsilon=10$）

【εが大きいとき】 たとえば $\varepsilon=10$ とすると振動の様子は図5のようになり，相平面における極限軌道は図6のようになる．図5のようにほとんど静止した状態が続いたあとで急激に動き，またしばらくほとんど動かない状態になることを繰り返す．このような振動を弛緩振動という．このような振動は充電されると放電することによって周期的に発光するス

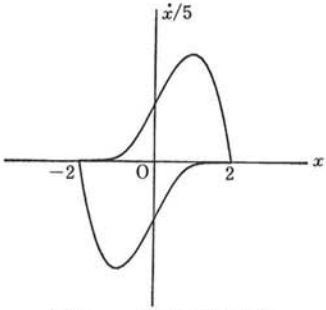


図6　$\varepsilon=10$ の極限軌道

トロボなどでみられる．

【自励振動】 ファン・デル・ポールの方程式における発振は電気的なエネルギーが注入されているから起こるのであるが電源は直流であって振動的ではない．一般に振動的ではない外力のもとで生じる振動を自励振動という．ファン・デル・ポールの方程式で表される発振はその1例であるが，たてつけの悪い戸を開けるときガタガタいうのも，糸を弦で引くとヴァイオリンが鳴るのも自励振動である．身のまわりに自励振動の例はきわめて多い．

レイリーの方程式

ファン・デル・ポールの方程式（3）において $x=\sqrt{3}\dot{y}$ とおくと

$$\dddot{y}-\varepsilon(1-3\dot{y}^2)\ddot{y}+\dot{y}=0 \qquad (6)$$

を得る．これを t で積分すると

$$\ddot{y}-\varepsilon(1-\dot{y}^2)\dot{y}+y=c \text{（定数）} \qquad (7)$$

となるが，$y-c$ を改めて x とおくと

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-\dot{x}^2)\dot{x}+x=0 \qquad (8)$$

を得る．これをレイリー (Rayleigh) の方程式という．

リエナールの方程式

減衰振動の式（1）やレイリーの方程式（8）などを一般化した式

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0 \qquad (9)$$

をリエナール (Liénard) の方程式という．この式は

$$\frac{dx}{dt}=v$$
$$\frac{dv}{dt}=-\{x+\varphi(v)\} \qquad (10)$$

と書けるので，軌道を与える式は (10) の2式の比

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x+\varphi(v)}{v} \tag{11}$$

で与えられる．軌道（v と x の関係）の式（11）は作図法によって次のように解くことができる．

まず相平面 (x, v) における曲線（リエナールの特性曲線）

$$x=-\varphi(v) \tag{12}$$

を作図する（図7）．次に任意の点 $\mathrm{P}(x, v)$ から x 軸に平行線を引き，特性曲線（12）との交点をRとする．Rから x 軸に垂線を下ろし，その足をSとし，Pを通りSPに垂直な線PQを引く．この直線PQはPを通る軌道の接線である．こうして各点における軌道の方向が決まるから，これを結んで軌道の形が求められる．

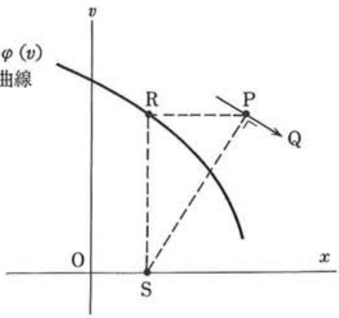


図7

【証明】図7においてPの x 座標は x であり，Rの x 座標は $-\varphi(v)$ であるから $\mathrm{RP}=x-\{-\varphi(v)\}=x+\varphi(v)$．したがってSPが x 軸となす角 θ の正接（タンジェント）は

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{RP}}=\frac{v}{x+\varphi(v)} \tag{13}$$

であり，これに垂直な直線PQの傾きは

$$-\frac{x+\varphi(v)}{v}=\frac{dv}{dx} \tag{14}$$

である．これは（11）と一致するのでこの軌道の接線はPQと一致する． ∎

【例】減衰振動（1）の場合は $\varphi(v)=\varepsilon v$ であり，特性曲線は $x=-\varepsilon v$ なので軌道は図8のような作図で求められる．レイリーの方程式（8）の場合は $\varphi(v)=-\varepsilon(1-v^2)v$ であり特性曲線は $x=\varepsilon(1-v^2)v$ なので軌道は図9のような作図で求められる．

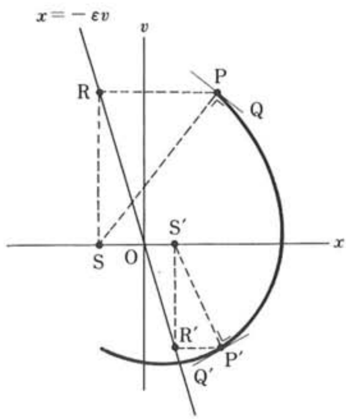


図8　減衰振動

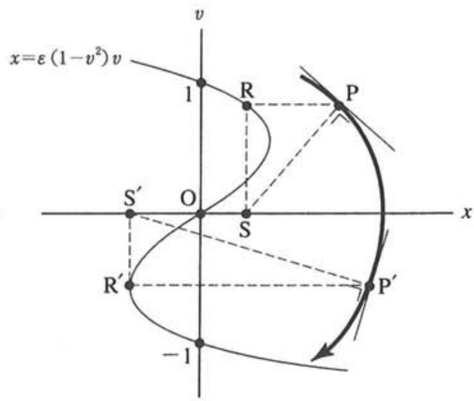


図9

Tea Time



発振現象

机を引きずって動かすとガタガタと振動することがある．白墨のもち方によっては振動して黒板に点線がえがけることがある．このように一定の運動をさせようとしたのに振動が起こるのが発振である．ひとりでに振動が起こるので自励振動という．

自励振動の例は身のまわりにいっぱいある．風に木の葉がそよぐのも，風で湖面が波立つのも自励振動といえるだろう．風が振動を与えなくても振動は生じる．

誰か風を見たでしょうか．
誰も風を見はしない．
それでも木の葉をゆるがせて
風はそっと通り過ぎて行く．

日本的な庭の静けさを破って竹の筒が石を打つ音が時折り聞こえることがある．いわゆる鹿おどしである．細い水の流れが竹の筒を満たすとその重さで筒が傾くと同時に筒から水が流れ落ちて筒はもとの姿勢に戻り，そのときに石を強く打つのである．これはまったく違うが一定の時間間隔で写真のフラッシュが点滅

するストロボに似ている．電気が蓄電器にためられると放電する装置である．クリスマスのツリーなどに点滅する豆電球がたくさんつけられているが，あれは点灯すると電球の中のバイメタルが暖められて曲がるために電流が一時切れるからである．

自励振動の原因は，乾性摩擦から電気的なものまで実にさまざまであるが，数式で表そうとすればファン・デル・ポールの方程式か，あるいはそれに類似した式で表される．これもおもしろいことである．

第 2 講

ロジスティック方程式

—テーマ—

◆ 力学系
◆ ロジスティック方程式
◆ Tea Time： 人口爆発

力学系の一般化

簡単のため質量が1の質点が x 軸に沿って運動しているとし，その位置を x，速度を v とすると運動方程式は

$$\frac{dx}{dt}=v(x,t)$$
$$\frac{dv}{dt}=f(x,v,t) \qquad (1)$$

で与えられる．自由度が f の運動ならば運動方程式は

$$\frac{dx_j}{dt}=v_j(x_1,x_2,\cdots,x_f,t)$$
$$\frac{dv_j}{dt}=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_f,v_1,v_2,\cdots,v_f,t) \qquad (2)$$
$$(j=1,2,\cdots,f)$$

となる．これを一般化して n 個の1階の微分方程式

$$\frac{dx_j}{dt}=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) \qquad (j=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

によって記述されるような体系を力学系という．一般化された，あるいは広い意味の力学系である．本来の力学系ならば変数が座標と速度の対をなすので n は偶数に限られるが，一般化された力学系では n は奇数の場合も偶数の場合もある．

たとえば化学反応が時間的に進行するとき，j 番目の化学成分の量を x_j とすれば（3）は化学反応を表す方程式である．また x_j を生物の種 j の個体数とすれば（3）は生態系の時間的変化を表すことになる．

ロジスティック方程式

そこである国の人口，あるいは生態系におけるある種の個体数 N の時間変化を考え，一番簡単な仮定として個体数 N の変化の速度が N に比例するとすれば，その変化は微分方程式

$$\frac{dN}{dt}=kN \tag{4}$$

で与えられる．これを積分すれば

$$N=N_0e^{kt} \tag{5}$$

を得る．ここで N_0 は $t=0$ における N の値である．もしも $k<0$ ならば N は時間の経過につれて減少するが，$k>0$ ならば N は時間とともに増大する．

時間を不連続にして微分係数 dN/dt の代わりに $(N_{n+1}-N_n)/\tau$（τ は定数）を用いれば（4）の代わりに

$$N_{n+1}-N_n=k\tau N_n \tag{6}$$

を得る．このとき

$$\begin{aligned} N_{n+1}&=(1+k\tau)N_n \\ &=(1+k\tau)^2N_{n-1}=\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

であるから

$$N_n=(1+k\tau)^nN_0 \tag{8}$$

となる．$k\tau>0$ ならば個体数 N_n はいわゆるネズミ算的に増大する．

$\tau=t/n$ とおけば

$$(1+k\tau)^n=\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n=\left\{\left(1+\frac{kt}{n}\right)^{n/kt}\right\}^{kt} \tag{9}$$

と書け，$n\to\infty$ の極限では

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n/a}=e \tag{10}$$

により（8）は（5）に帰する．

実際に個体数が増えすぎると，そのために環境が悪化するなどの影響が加わって増加を抑える要因が生じる．これを取り入れる方法として一番簡単なのは変化率 $k(k>0)$ が N の増加とともに減少するとして

$$k=\alpha(1-\beta N) \qquad (\alpha, \beta>0) \tag{11}$$

とおくことであろう．こうすると（1）は

$$\boxed{\frac{dN}{dt}=\alpha N(1-\beta N)} \tag{12}$$

となる．この方程式をロジスティック（logistic）方程式という．ロジスティックとはもともと軍隊で軍需品や食糧などを前線に送る後方部隊を意味し，兵站（へいたん）と呼ばれる．これから転じて物資の流通，すなわち物流をロジスティックという．

（12）は右辺に N^2 項をもつからいちおう非線形方程式である．しかし（12）を N^2 でわると

$$\frac{1}{N^2}\frac{dN}{dt}=\alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right) \tag{13}$$

となり，書き換えると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}-\beta\right)=-\alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right) \tag{14}$$

となる．これは $1/N$ について線形である．（12）は線形化されたのである．このように一見非線形であるようにみえても変数の置き換えによって線形化できる場合もある．どのように変数を置き換えても線形化できない場合が本当の非線形方程式であるといいたいところであるが，これでは与えられた方程式が本当に非線形であることを立証することは事実上不可能になってしまう．ふつうは線形化する方法が簡単に見出されないものを非線形といっているのであるが，非線形性を厳密に規定するのはむずかしい．

さて（14）を積分すれば

$$\frac{1}{N}-\beta=\left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t} \tag{15}$$

となるので (12) の解は

$$\boxed{N=\frac{1}{\beta+\left(\dfrac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t}}} \tag{16}$$

で与えられる.

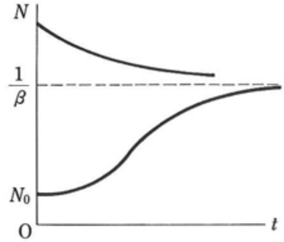


図 10 ロジスティック曲線

$\alpha>0$ としているから, $t=0$ のときの値 N_0 によらず $t\to\infty$ で $N\to 1/\beta$ となる. N と t の間の関係は図 10 のようになる. この曲線はロジスティック曲線という.

線形の式 (14) を差分化すると

$$\left(\frac{1}{N_{n+1}}-\beta\right)-\left(\frac{1}{N_n}-\beta\right)=-\alpha\tau\left(\frac{1}{N_n}-\beta\right) \tag{17}$$

となる. この式は

$$N_{n+1}-N_n=\alpha\tau N_{n+1}(1-\beta N_n) \tag{18}$$

と書き換えられる. (18) は (17) のように線形化できるのである. その解は (17) を用いて

$$N_n=\frac{1}{\beta+\left(\dfrac{1}{N_0}-\beta\right)(1-\alpha\tau)^n} \tag{19}$$

であることがわかる. N_n は n についてなめらかな変化をし, その様子は (16) のロジスティック曲線と本質的に違わない ($\tau=t/n$ として $n\to\infty$ にすれば (19) は (16) に一致する).

(12) の差分化した方程式として

$$N_{n+1}-N_n=\alpha N_n(1-\beta N_n) \tag{20}$$

も考えられる. この式を (17) のように線形化することはできない. β が小さいときは (20) の解はロジスティック曲線と同様のなめらかな変化を与えるが, β がある値を超えると (20) の N_n は n に対してカオス的な変化をするようになる. このことについては第 5 講で述べることにする.

Tea Time



人口爆発

ネズミ算というのがある．初め少数しかいなかったネズミが増殖を繰り返すと，とんでもなく多数になり，やがて天文学的な数になってしまう．むかし曽呂利新左衛門とかいう知恵者がいて，大閤秀吉から何なりとほうびを取らせるといわれて毎日2倍ずつ米粒を所望したという話がある．やがて米粒の数は莫大になったことであろう．人間は初め1個だった細胞が分裂することによってできあがる．その分裂の回数は約80回だときいたことがある．1人の人間は約2^{80}個の細胞からできていることになる．小さいような大きいような数である．

本当だかどうだか知らないが，ネズミは増えすぎると川へ入って集団自殺するという話がある．昔話に，街に増えすぎたネズミを笛の音で呼び集めて川へ入水させて退治したというのはこんなところからつくられた話かもしれない．

世の中には増えるメカニズムでどんどん増えるものがある．しかし増えすぎると増加を抑えるメカニズムがはたらき出す．人口の増加も昔は確かにそうであった．しかし世界の人口は農業革命のときに飛躍的に増加し，その後増加率はしだいに停滞したのが，産業革命後また上向きになって現在に至った．自然に増加を抑えるはずの抑制力を技術の進歩で取っ払ってきたのである．そしていまや人類は人口爆発という危機に直面している．いろいろの危機がいわれているが，そのほとんどは世界の人口のとめどもない増加によって起こるように思われる．これに対しては増加を抑える従来のメカニズムは無力である．とすれば，ロジスティック方程式を越えたものがありうるかどうかという深刻な問題をわれわれはかかえていることになる．これは人類のアキレス腱である．

第 3 講

ロトカ-ヴォルテラの方程式

―テーマ―
- ◆ 生物の個体数の変化
- ◆ ロトカ-ヴォルテラの方程式
- ◆ Tea Time： 生態系

生態系の個体数の変化

第2講で扱ったロジスティック方程式を2変数 (x, y) の場合に拡張したものとして

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - k_1 xy \qquad (\varepsilon_1, k_1 > 0) \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon_2 y + k_2 xy \qquad (\varepsilon_2, k_2 > 0) \end{aligned} \tag{1}$$

を考えよう．$\varepsilon_1, \varepsilon_2$，$k_1, k_2$ はすべて正であるとするとこの連立方程式は個体数 x の草食動物とこれを食べて生活する個体数 y の肉食動物が草が十分ある場所で共存している生態系を表すことになる．草食動物 (x) は草を食べて増殖 $(\varepsilon_1 x)$ するが，肉食動物 (y) に会う（その確率は xy に比例する）と食べられて減る $(-k_1 xy)$．肉食動物は草食動物に会えばこれを食べて栄養とするのでその増殖の割合は $k_2 xy$ で与えられるが，自然死のために減少 $(-\varepsilon_2 y)$ すると考えるのである．（1）は生態系の変化を表すロトカ-ヴォルテラ (Lotka-Volterra) の方程式

の一番簡単な場合である．

x, y を与えると dx/dt，dy/dt が決定されるから（1）は決定論的な方程式である．すなわちある時刻の x と y を与えると次の瞬間の x と y が一義的に定まるから軌道は (x, y) 面で交わることがない．ここで一般に2次元の (x, y) 面の有限な領域で交わることのない軌道はきわめて限られたものになることを注意しておこう．たとえば摩擦のない単振動では (x, v) 面（相平面）内で軌道は閉曲線（楕円）をえがく．摩擦がある振り子では軌道はしだいに安定点へ近づく．

さて（1）には

$$\frac{e^{k_2x+k_1y}}{x^{\varepsilon_2}y^{\varepsilon_1}}=\text{一定} \tag{2}$$

あるいは対数をとって

$$k_2x-\varepsilon_2\log x+k_1y-\varepsilon_1\log y=\text{一定} \tag{3}$$

という保存量があることが示される．

【証明】（1）の第1式の両辺に k_2 を，第2式の両辺に k_1 をかけて両式を加えると

$$k_2\frac{dx}{dt}+k_1\frac{dy}{dt}=\varepsilon_1k_2x-\varepsilon_2k_1y \tag{4}$$

となる．他方で同じ（1）の第1式に ε_2/x を，第2式に ε_1/y をかけて両式を加えると

$$\varepsilon_2\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}+\varepsilon_1\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt}=\varepsilon_1k_2x-\varepsilon_2k_1y \tag{5}$$

を得る．（4）と（5）の右辺は等しいから

$$k_2\frac{dx}{dt}+k_1\frac{dy}{dt}=\varepsilon_2\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}+\varepsilon_1\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} \tag{6}$$

これを積分すれば（3）が得られる． ∎

（1）の図式解法

（2）において

$$\begin{aligned}\xi&=x^{-\varepsilon_2}e^{k_2x}\\ \eta&=y^{\varepsilon_1}e^{-k_1y}\end{aligned} \tag{7}$$

とおけば（2）は

$$\xi = c\eta \qquad (c=\text{定数}) \qquad (8)$$

と書ける．c は初期条件で決まる定数である．

まず図11のように $x\sim\xi$ と $y\sim\eta$ の曲線をえがいておく．初期値 $A(x_0, y_0)$ を与えてこれに相当する点 $A'(\xi_0, \eta_0)$ を定める．そして直線 OA' を $\xi=c\eta$ とする $(c=\xi_0/\eta_0)$．次に A' に近い点 B' をとりこれに対応する点Bを定め，同様にしてつぎつぎと，C, D, …を求めて点ABCD…を結べば (x, y) 面の軌道が得られる．

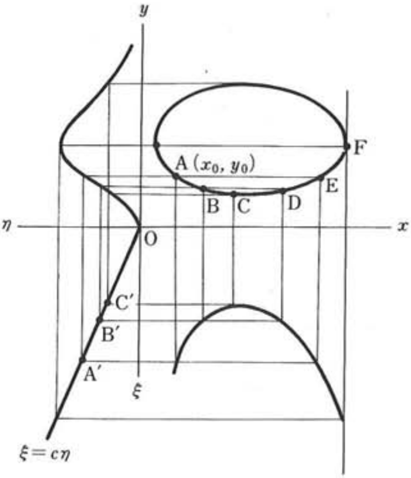


図 11

x, y を t の関数として示せば図12のように，x と y はたがいに少し位相のずれた周期的な曲線になる．草食動物をウサギ (x) とし，これを食べるキツネを肉食動物 (y) とすれば，キツネがウサギを食べて殖えればウサギは食べられて減り，ウサギが減ればこれを食物とするキツネも減り出す．キツネが減ればウサギが殖える．こういうことを周期的に繰り返すのである．

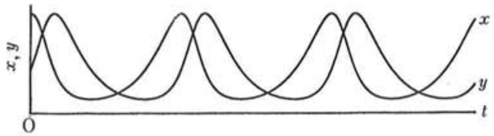


図 12

一般的なロトカ-ヴォルテラの方程式

ロトカ-ヴォルテラの方程式を生物の種の数が $n(\geq 2)$ の場合に拡張して

$$\frac{dN_j}{dt} = \varepsilon_j N_j + \frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} N_j N_k \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \qquad (9)$$

としよう．ここで α_{jk} は反対称，すなわち

$$\alpha_{jk} = -\alpha_{kj} \qquad (10)$$

とし，（9）は定常解 $dN_j/dt=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ をもつとする．定常解の N_j の値を $\bar{N}_j$ とすれば

$$\varepsilon_j\beta_j+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\bar{N}_k=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

である．

（9）は保存量

$$G=\sum_{j=1}^{n}r_j(e^{x_j}-x_j) \tag{12}$$

をもつことが示される．ただしここで

$$\begin{aligned} x_j&=\log\frac{N_j}{\bar{N}_j} \\ r_j&=\beta_j\bar{N}_j \end{aligned} \tag{13}$$

である（$n=2$ のとき保存量 (12) は（3）を与えることが容易に示される）．

【証明】 (13) と（9），(11) から

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt}&=\frac{1}{N_j}\ \frac{dN_j}{dt}=\varepsilon_j+\frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}N_k \\ &=\frac{1}{\beta_j}\sum\alpha_{jk}(N_k-\bar{N}_k) \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．さらに書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{jk}\beta_k\bar{N}_k}{\beta_j\beta_k}\left(\frac{N_k}{\bar{N}_k}-1\right) \\ &=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}r_k(e^{x_k}-1) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．ただし

$$\gamma_{jk}=\frac{\alpha_{jk}}{\beta_j\beta_k}=-\gamma_{kj} \tag{16}$$

とおいた（ここで (12) により

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}=r_k(e^{x_k}-1) \tag{17}$$

であることに注意すれば

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\frac{\partial G}{\partial x_k} \tag{18}$$

と書けることもわかる）．

さて (12) を t で微分して (15) を用いれば

$$\frac{dG}{dt}=\sum_{k=1}^{n}r_k(e^{x_k}-1)\frac{dx_k}{dt}$$
$$=\sum_{k,l}r_k(e^{x_k}-1)\gamma_{kl}r_l(e^{x_l}-1)$$
$$=\sum_{k,l}\gamma_{kl}r_kr_l(e^{x_k}-1)(e^{x_l}-1) \tag{19}$$

となるが，右辺で k と l とを取り換えると $\gamma_{lk}=-\gamma_{kl}$ なので $dG/dt=-dG/dt$ が導かれる．したがって

$$\frac{dG}{dt}=0 \tag{20}$$

すなわち G は保存量である． ▮

$\mathbf{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 空間における流れ

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を座標とする状態空間（位相空間）V を考えるとこの中の1点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はこの生態系のミクロ状態を表す．このようにミクロ状態を表す点を統計力学では代表点という．そこで V 空間内に代表点の連続的な分布を考え，その密度を $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき，各代表点は (18) によって移動するが，その流れに乗ってみれば密度 ρ は不変に保たれる（この性質は力学系においてリゥヴィル (Liouville) の定理と呼ばれ，統計力学の基礎をなすものであるが，ロトカ-ヴォルテラ系においてもこれが成立するのである．これを基礎にして生態系の統計力学が試みられ，ある程度成功している）．この不変性は

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \tag{21}$$

と書かれる．

【証明】 代表点の密度 $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ の微分は一般に

$$d\rho=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}dx_j+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt \tag{22}$$

と書ける．代表点の流れに乗ってみるとき

$$\frac{dx_j}{dt}=\dot{x}_j \tag{23}$$

は流れの速度である．V 空間内に $x_1\sim x_1+\Delta x_1$, $x_2\sim x_2+\Delta x_2, \cdots$, $x_n\sim x_n+\Delta x_n$

の微小部分 (体積$=\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$) を考えると，$x_1$ 軸に垂直な面を単位時間に通過する代表点の数は $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)\dot{x}_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ であり，$x_1 + \Delta x_1$ において x_1 軸に垂直な面を単位時間に通過してこの領域から出ていく代表点の数は

$$\left\{\rho\dot{x}_1 + \frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1\right\}\Delta x_2 \cdots \Delta x_n \tag{24}$$

である．したがってこの領域の中の代表点の増加は

$$\begin{aligned}\rho\dot{x}_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n - &\left\{\rho\dot{x}_1 + \frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1\right\}\Delta x_2 \cdots \Delta x_n \\ &= -\frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n \end{aligned}\tag{25}$$

となる．他の軸に垂直な面についても同様であるから，領域内の代表点の数 $\rho\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ の変化の割合は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{x}_j)}{\partial x_j}\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n \tag{26}$$

となる．したがって (22) を dt でわった式と (26) から

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\dot{x}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{x}_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\dot{x}_j \\ &= -\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial x_j}\end{aligned}\tag{27}$$

この右辺に (18) ($\dot{x}_j = dx_j/dt$) を代入すれば γ_{jk} の反対称性により

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial x_j} = \sum_{j,k}\gamma_{jk}\frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{28}$$ ▮

Tea Time

生態系

バルカン半島とヨーロッパの境にアドリア海がある．そのアドリア海で取れる魚の数が，多い年の次には少ない年が来るというふうに周期的に変化することが知られていた．これを聞いたロトカ (A. J. Lotka) が報告をまとめ，ヴォルテラ (V. Volterra) が数理的な考察を加え，ロトカ-ヴォルテラの方程式がつくられた．これは生態系の問題が数理的な発展をうながした著しい例の1つである．ロジスティック方程式がいわば静的な安定化を表すのに対して，ロトカ-ヴォルテラの方程式はより動的な生態系を表している．

アドリア海は豊富な食糧をもつなどロトカ-ヴォルテラ系が成り立つための前提条件を満足する場所であったのだろう．同じように草食動物にとって豊富な食糧のあるカナダの草原などで，たとえば草食動物のウサギと，これを餌とするキツネの数がたがいに関係し合いながら変動する様子がロトカ-ヴォルテラの方程式で記述されることがよく知られている．

このようにロトカ-ヴォルテラ系はいわばマクロな動物の生態系について考え出されたものであるが，ミクロの生物，すなわち微生物がより広い応用をもつであろう．そして外界からの影響に対する生態系の応答が興味深い．おそらく非生物系である物理系が非可逆的であるように，生態系も非可逆的であるに違いない．

本文にも述べたとおり，ロトカ-ヴォルテラの方程式系はエネルギーに相当する保存量をもち，ハミルトン運動方程式の形に書けるが，とくに簡単な場合や戸田格子（第11講以下参照）に帰せられる特別の場合を除き，この体系にはそれ以外に保存量がなく，可積分系ではない．したがって一般にカオス的，あるいはエルゴード的である．そのためロトカ-ヴォルテラ系の統計力学も考えられ，ある程度の成功を収めている．これを非平衡の場合に拡張することも期待される．

生態系は一般にいえばカオス的であろう．しかもカオス的でありながら平衡から大きく離れた非平衡の状態で自己組織化された生態系が擾乱に対して安定な体系として存在しているようである．それは非平衡の組織化された状態が圧倒的に多くのミクロ状態をもつということかもしれず，そのパラドックス的なところであるように思われる．よくいわれるように生物には熱力学でいう外界との熱平衡

の状態はない．それが生物の特徴で，熱平衡は生物の機能をやめたときのことである．生態系も同じである．生態系も生物の個体と同じく熱平衡の状態にはない概念である生命をもつ体系である．

物質の存在理由は物理的には解明できないともいわれる．生命の存在理由も究極的には解明できない問題であるように思われる．ある人は存在理由を求めて科学に入るかもしれないし，時折そこへ帰ろうとするとしても，科学は結局，存在するものを認める立場を出られない．

第 4 講

ローレンツ系のカオス

―テーマ―

- ◆ 対流
- ◆ ローレンツの方程式
- ◆ Tea Time: ベナールの渦

対　　流

変数の数が3以上（3を含む）の力学系は一般にカオスになる．生態系のロトカ－ヴォルテラ系も一般に種の数 n が3以上のときは個体数の変動はカオスになるのである．このことをはっきりさせたのはアメリカの気象学者ローレンツ (E. N. Lorenz) であった．

液体，あるいは流体の下部を上部よりも高い温度に保つとき，温度差が小さい間は流体は静止し，熱伝導で熱が移るだけである．しかし温度差を少し大きくすると対流が生じる．流体の層の厚さが小さいと対流は制限されて特徴的なパターンの対流ができる．これをベナール (Bénard) の対流，あるいはレイリー-ベナールの対流という．レイリー (Rayleigh) はこの対流の発生条件を理論的に研究したのである．

地球の表面は約10 km の空気の層で覆われている．地理的な距離に比べれば大気はきわめて薄い層なのであるが，この中の対流は複雑な気象現象を生じる．ローレンツはこのような大気のベナール対流の計算機によるシミュレーションを

行っていた．初め彼は12個の変数の連立方程式を計算機にかけていたが，1961年にこの計算の結果が初期値にきわめて敏感であることを偶然発見し，初期値敏感性を詳しく調べるため方程式を簡単化してしかも問題の本質を失わない3変数の体系を考え出した．これをローレンツの方程式（ローレンツ系）といい

$$\frac{dx}{dt}=-\sigma(x-y) \qquad \frac{dy}{dt}=Rx-y-xz \qquad \frac{dz}{dt}=-bz+xy \tag{1}$$

で与えられる．ここで x は対流の強さ，y は上昇する流れと下降する流れの温度差，z は上下方向の温度分布のフーリエ係数をそれぞれ表す．定数 σ はプラントル数 $\sigma=\nu/D_T$（ν は動的粘性率 η/ρ, D_T は熱の拡散率），R はレイリー数 $R=\rho g\alpha d^3\Delta T/\eta D_T$（$\rho$ は密度，g は重力加速度，α は熱膨張率，d は流体の厚さ，η は粘性率，ΔT は上下の温度差），b は対流の空間的周期に関係する定数（周期を $2\pi/q$ として $b=4\pi^2/(\pi^2+q^2)$）で，すべて無次元の定数である．ローレンツは

$$\sigma=10, \qquad R=28, \qquad b=\frac{8}{3}$$

とした．もしも R として24.74よりも小さい数値を与えると定常的な安定した対流が生じる．$R=28$ は非定常な対流が発生する臨界値よりも少し大きい値である．

ローレンツは（1）を数値的に解いた結果を1963年に発表したが，その結果はたいへん複雑である．この結果はコンピュータなしには得られなかったに違いない．コンピュータは新しく微細な世界をみせてくれたのである．

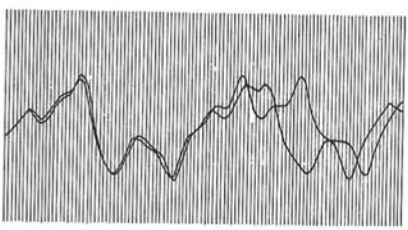


図13

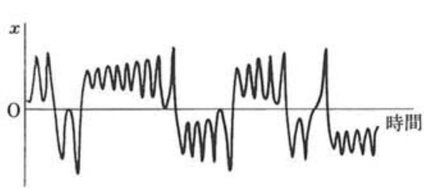


図14

図 13 はローレンツ系の初期値敏感性を示す．初めにごくわずか異なった初期値から出発したとき，しばらくするとまったく違った変化を示すようになる．この図は煙や湯気の動きを思わせる．図 14 は変数 x の不規則な変動の 1 例である．

変数が 3 個なので水平方向に x 軸と y 軸をとり，鉛直上方に z 軸をとると，この 3 次元空間で状態を表す点の軌道は 2 枚の羽根のようなところをぐるぐると回っては時折こちらからあちらへと飛び移る（図 15. b は模式図）．一方を何度回ったら他方へ行くかは定かではないし，他方へ行って戻ってきたときはもとの軌道の間の新しい軌道をたどる．その振舞いはきわめて微妙でストレンジアトラクタと呼ばれている．アトラクタは軌道を引きつける点，あるいは領域のことで，減衰振動の静止点のような点やファン・デル・ポールの方程式などに現れる極限軌道（リミットサイクル）もアトラクタである．これらは 2 変数 (x, v) のときのアトラクタであるが，ストレンジアトラクタは 3 変数以上の体系で現れる．もちろん方程式は決定論的であるから軌道は交らない．3 変数の場合は軌道が 3 次元空間で立体交差するのでストレンジアトラクタが可能なのである．ストレンジアトラクタはその一部を拡大してみると，その中に同じような構造をもち，いわゆるフラクタル的な複雑さをもっていることがわかる．すでに述べたように軌道の大部分は 2 枚の羽根に乗っているようにみえるが，これらは完全な平面ではなくて，やはりフラクタル的である．言い換えればこれらの羽根は 2 次元の平面ではなく，2 にきわめて近い非整数のフラクタル次元をもっている．

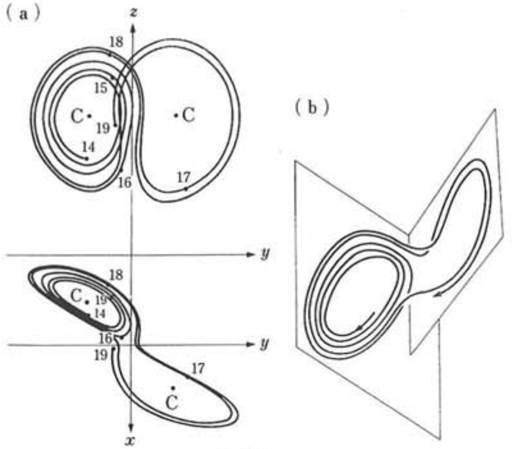


図 15

位相空間の体積

ローレンツ系の状態を表す点の軌道はストレンジアトラクタのまわりをいつま

でもさまよい，静止することがない．しかしこの体系はエネルギーのように保存する量をもたない．（2）からわかるように dx/dt は $-x$ に比例する項をもち，y と z も同様であるから減衰，あるいは散逸的な性質をもっている．しかし同時に他の変数によって駆動される（ロトカ-ヴォルテラ系でも似たことがあったが，保存量 G が存在するので保存系であった）．

エネルギーが散逸する典型的な例である減衰振動はしだいに振動が減衰して最後に静止する．この場合，位相空間 (x, v) の中に代表点の集まった領域を考えると，代表点が静止点に近づくにつれて領域の面積はしだいに0に近づくことになる．位相空間の体積がこのように0に近づくのが散逸系の1つの特徴である．

ローレンツ系においても，位相空間 (x, y, z) の体積 V はしだいに減少する．このとき

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}=-(\sigma+1+b) \tag{2}$$

となるからである．

【証明】　ロトカ-ヴォルテラ系の場合に示したように（第3講（27）），位相空間を $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで ρ は位相空間の微小部分における代表点の密度であって，この代表点の数を n，これが占める位相空間の体積を V とすれば

$$\rho V=n \tag{4}$$

は代表点の流れに沿っていくとき一定であるから

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \tag{5}$$

したがって

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} \tag{6}$$

さて，ローレンツ系（1）においては（$\dot{x}=dx/dt$ など）

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}=-\sigma, \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}=-b \tag{7}$$

したがって位相空間の体積の変化率は

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=-(\sigma+1+b) \tag{8}$$

となる．σ と b はともに正としているので

$$V=V_0e^{-(\sigma+1+b)t} \tag{9}$$

の形で位相空間の体積は指数関数的に小さくなる．∎

レスラー系

ストレンジアトラクタをもち，ローレンツ系よりも簡単なモデルがレスラー系である．これは

$$\frac{dx}{dt}=-(y+z)$$
$$\frac{dy}{dt}=x+\frac{1}{5}y \tag{10}$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{5}+z(x-\mu)$$

で与えられる．μ は定数で $\mu=5.7$ としたときの軌道の様子を図 16 に示す．この系では

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{1}{5}+x-\mu \tag{11}$$

であるが，x は図 17 のように正負の値をとるので，$\mu=5.7$ のとき長時間的には

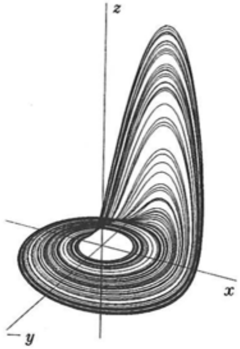


図 16

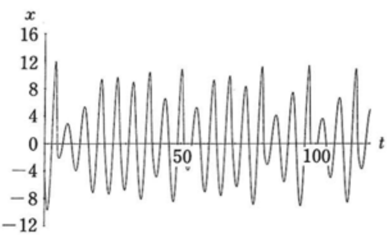


図 17

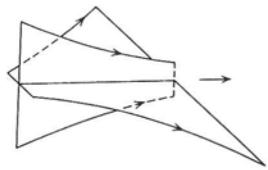


図 18

$dV/dt<0$ である．

レスラー系において代表点が占める領域は1つの方向に広がり，これに垂直な方向には縮まって図18のように変形することが示される．この延び縮みは指数関数的の変形であって，その指数はリアプノフ数と呼ばれている．

リアプノフ数の1つが正であれば他のものは負となり，ストレンジアトラクタはレスラー系の場合のように帯状につぶれて広がる．軌道はこのようにして折り畳みの変形を受ける．カオスはこのような折り畳みの操作によって発生する．

Tea Time



ベナールの渦

ベナールの渦というとすぐ思い出すのは熱いみそ汁の中の対流である．火にかけた鍋のみそ汁はもっと盛んに対流を起こす．ガラスの紅茶ポットの中では紅茶の葉が対流につれて動く．これを眺めて心を遊ばせるときは本当のティータイムである．

寺田寅彦先生の随筆に，熱い茶の表面にかすかにみられる湯気のことを書いたのがあった．明るい光を当ててよく注意してみると茶の水面に密着するようにして立ち上がる湯気がみられるが，そこに湯の表面近くの渦の境が割れ目の境界線を表すような湯気のすじがあって，弱い風を送るとそのすじがひらひらと組み換えられて動く．そういう微妙な湯気の動きのことが書いてあった．

これとはまったく関係がないのだが，北極や南極に近いノルウェー，カナダ，南極の基地でよくみられるオーロラは空から下がった薄いカーテンともみえ，また上空へ立ち上る湯気のようにもみえるが，それがひらひらと動く様子はまさに熱い茶の表面にたゆとう湯気の渦のようでもある．両者の間には何か似たところがあるような気がする．それは不安定さをもったある組織といえるかもしれない．

寺田先生は渦や割れ目に特別な興味をもっていた．対流渦に関する寺田先生の研究がベナールの研究に数年遅れたのはおしいことだともいえる．ベナール渦などの研究をしているスペインの知人から寺田先生の渦やカオスに関する論文をコ

ピーして送ってくれと頼まれて，コピーをしてもらって送ったことがある．寺田先生の英文論文集が再刊されたとき，買いたく思ったが書斎が狭くて困っている実状なので残念ながら見送ったこともある．

地表の大気の約 10 km の厚さの対流圏で多くの気象現象が起こる． 10 km といえば歩いても 2 時間ちょっとで行けるから，大気の厚さは地理的な距離に比べて実に薄いのである．台風などは直径何百 km もあるが，厚さは約 10 km だから 1 円玉のように薄べったいのである．薄い液体の層の中のベナール対流よりももっと薄いといってよいだろう．

夏の日に暖められた地面から上昇する大気は上がるにつれて断熱膨張によって冷却し，中の水蒸気が雄大な積乱雲をつくる．これが発達すると強い夕立になり，下降気流ができるとともに上昇気流は弱まってしまう．こうして上昇気流が生じてから消滅するまでの時間は 1 時間程度であるという．積乱雲の大きな雲の峰はこうしてつぎつぎと生長しては消滅する上昇気流によるものである．このように世代交代を繰り返す対流渦を表す簡単な数学的モデルはあるのだろうか．